Die Quadratrix

Rieke Deimer

6. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Was ist eine Quadratrix?

Im Allgemeinen bezeichnet man eine Kurve als Quadratrix, wenn sie zur Quadratur einer anderen Kurve dient - das heißt, wenn sie hilft, zu einer gegebenen Kurve ein flächengleiches Quadrat zu finden. Im weiteren Sinne zählt sie somit auch zu den Integralkurven - jene Kurven, deren Ordinaten die von einer anderen Kurve eingeschlossenen Flächen angeben.
Die bekannteste Quadratrix ist die sogenannte *Quadratrix des Hippias*, auf die sich in diesem Skript konzentriert wird.
Die populärste Kurve, für die man ein in der Fläche gleiches Quadrat herleiten möchte, ist seit jeher der Kreis - doch nicht umsonst ist die „Quadratur des Kreises“ eine Metapher für ein nur schwer oder sogar unmöglich lösbares Problem. Wieso das so ist? Diese Frage führt zurück in die Jahre um 420 v. Chr..

1.2 Historisches

Zwar wurde sich schon vorher mit der Aufgabe beschäftigt, ein Quadrat zu finden, das in seiner Fläche dem Kreis gleichkommmt, etwa mit Annäherungen des Kreises durch Vielecke. Die Quadratrix jedoch war die erste Kurve, die man als Hilfskurve verwendet hat, um die Quadratur zu lösen. Der Sophist Hippias von Elis (460 - 400 v. Chr.) erfand etwa im Jahr 422 v. Chr. hierzu die erste Kurve, die weder Gerade noch Kreis war und durch zwei Bewegungen erzeugt wurde. Er benutzte sie jedoch, um ein anderes der drei klassischen Probleme der antiken Mathematik zu lösen: Die Dreiteilung des Winkels (deshalb wird die *Quadratrix des Hippias* oftmals auch *Trisektrix des Hippias* genannt).
Es ist nicht klar, ob sich Hippias selbst bewusst war, dass seine Kurve tatsächlich auch einem weiteren antiken mathematischen Problem, nämlich der Quadratur des Kreises dienlich war, denn die Entdeckung dieser Eigenschaft wird meist Dinostratus (ca. 390 - 320 v. Chr.) zugeschrieben (daher auch der dritte Name der Kurve, *Quadratrix des Dinostratus*). Dieser stellte im Jahr 335 v.Chr., also fast 100 Jahre nach Hippias' Entdeckung, fest, dass man mit Hilfe der Quadratrix ein Quadrat erstellen konnte, dessen Flächeninhalt gleich dem eines Viertelkreises war.
Auch Nikomedes (280 - 210 v. Chr.) verwendete Hippias' Quadratrix zur Kreisquadratur. Auf ihn geht auch die tatsächliche Namensgebung der Kurve zurück.
Die Quadratrix ist die erste bekannte transzendente Kurve und die erste, die durch zwei Bewegungen erzeugt wird und nicht im klassischen Sinne (=mit Zirkel und Lineal) vollständig konstruierbar ist, denn mit diesen Hilfsmitteln kann man nur eine dichte Teilmenge an Punkten der Quadratrix erzeugen.
Trotz der Erfindung dieser für die Zeit sehr außergewöhnlichen Kurve war Hippias damals nicht sehr beliebt: Platon nannte ihn arrogant und prahlerisch, mit einem weitreichenden, aber nur oberflächlichen Wissen über die Dinge ihrer Zeit und lehnte ihn ab, da er sein Wissen gegen Geld verbreitete.
Da die Quadratur des Kreises nur mittels Zirkel und Lineal nicht möglich ist (wie 1882 von Carl L.F. von Lindemann (1852 - 1939) nachgewiesen), ausschließlich diese Hilfsmittel aber damals für die Lösung der drei antiken mathematischen Probleme zulässig waren, gab es natürlich auch Kritik an der Quadratrix und deren „Lösung“ der Quadratur bzw. Winkelteilung. Dazu mehr in Abschnitt 5.1.
In einigen wenigen Quellen wird behauptet, Thomas Heath (1861 - 1940) sei der

Auffassung gewesen, dass ARCHYTAS VON TARENTUM (428-350 v. Chr.) eine Lösung mittels der Quadratrix für das dritte klassische Problem der antiken Mathematik, zur Verdopplung des Würfels gefunden habe - dies ist aber auf einen Übersetzungsfehler zurückzuführen.

2 Herleitungen

2.1 Einfache Herleitung und Formel

2.1.1 Ursprüngliche Herleitung

Die Quadratrix lässt sich auf verschiedene Weisen herleiten. Zunächst eine leicht verständliche Konstruktion, wie sie auch von Hippias erdacht war:

Man nehme ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge r. Dort zeichnet man einen Kreisbogen DB ein (= Viertelkreis mit Radius r). Nun kommen die beiden bereits erwähnten Bewegungen ins Spiel: man lässt nun eine Gerade $\overline{FF'}$ sich von der Quadratseite $\overline{DC}$ aus gerade nach unten bewegen, so dass Punkt F auf $\overline{DA}$ und Punkt F' auf $\overline{CB}$ verläuft. Gleichzeitig lässt man von der Seite $\overline{AD}$ aus am Kreisbogen DB entlang eine Gerade $\overline{AE}$ um A rotieren, und zwar so, dass die beiden Geraden $\overline{FF'}$ und $\overline{AE}$ gleichzeitig auf $\overline{AB}$ ankommen.
Die Spur des Schnittpunkts G bildet dann die Quadratrix (siehe Abbildung 1).

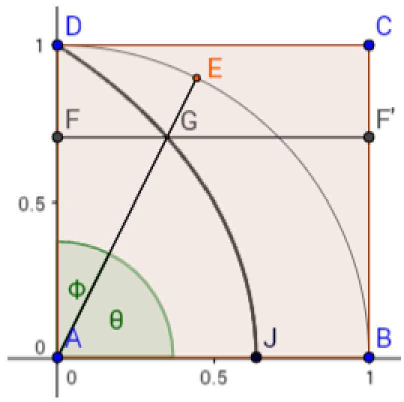

Abbildung 1: Konstruktion der Quadratrix am Einheitskreis (r=1)

Wie man sieht, ist die Quadratrix eine kinematische Kurve, also eine Kurve, die als Spur von zwei Bewegungen entsteht.
Damit beide Geraden gleichzeitig in $\overline{AB}$ ankommen, muss folgende Relation gelten:

$$\frac{DE}{DB} = \frac{|\overline{DF}|}{|\overline{DA}|}.$$

In Worten: Das Verhältnis von der zurückgelegten Strecke zur Gesamtstrecke ist bei beiden Bewegungen gleich. Dies ist die Grundeigenschaft der Quadratrix.

2.1.2 Die Formel

Zunächst wird die Formel in Polarkoordinaten hergeleitet. Dazu benötigt man einen Parameter $t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$, der den Anteil der zurückgelegten Strecke an der Gesamtstrecke beschreibt, und h sei nun die Höhe eines Quadratrixpunktes G über $\overline{AB}$. Es gilt $h = r(1-t)$, denn $r - rt = |\overline{DA}| - |\overline{DF}| = h$. Mit derselben Argumentation

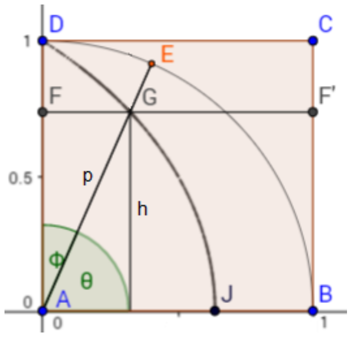

Abbildung 2: Herleitung der Polarkoordinaten

ist $\theta = \frac{\pi}{2} \cdot (1-t) \Longrightarrow (1-t) = \frac{2}{\pi} \cdot \theta$. Daraus folgt $h = \frac{2r}{\pi}\theta$. Wenn wir nun die Strecke $\overline{AG}$ mit p bezeichnen, so folgt (mit $p = \frac{h}{\sin(\theta)}$):

$$p = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\sin(\theta)}.$$

Dies sind die Polarkoordinaten der Kurve.

Mit der so gewonnenen Formel kann man nun den Schnittpunkt der Quadratrix mit der x-Achse herausfinden. Dies muss man über den Grenzwert dieser Formel machen, da sie für $\theta = 0$ nicht definiert ist und dieser Punkt somit nur als Grenzwert betrachtet werden kann. Dies sieht man auch an der oben gezeigten Konstruktion der Kurve: Wenn beide Geraden $\overline{AE}$ und $\overline{FF'}$ die Seite $\overline{AB}$ erreichen, haben sie keinen Schnittpunkt mehr, sondern liegen aufeinander.
Der Wert der Kurve für $\theta = 0$ ist also:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\sin(\theta)} = \frac{2r}{\pi} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin(\theta)} \overbrace{=}^{\text{L'Hospital}} \frac{2r}{\pi} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{2r}{\pi}. \Rightarrow |\overline{AJ}| = \frac{2r}{\pi}.$$

Möchte man die Quadratrix nun in kartesischen Koordinaten angeben, so ergibt sich für die x-Koordinate $x = p \cdot \cos(\theta) = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\sin(\theta)} \cdot \cos(\theta) = \frac{2r}{\pi} \cdot \theta \cdot \cot(\theta)$ und für die y-Koordinate $y = p \cdot \sin(\theta) = \frac{2r}{\pi}\theta$. Insgesamt folgt für die Darstellung in kartesischen Koordinaten also

$$x = y \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2r} \cdot y\right)$$

oder

$$x = y \cdot \cot\left(\frac{y}{r_0}\right),$$

wobei $r_0 = \overline{AJ} = \frac{2r}{\pi}$.
Um die Kurve besser darzustellen, bietet es sich an, die beiden Achsen zu vertauschen, so dass sich ergibt:

$$f(x) = x \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2r} \cdot x\right) = x \cdot \cot\left(\frac{x}{r_0}\right).$$

2.2 Andere Herleitungen der Quadratrix

2.2.1 Herleitung mittels einer Helix

Die Konstruktion der Quadratrix mittels einer Spirale vermeidet eine mechanische Konstruktion, wie sie zuvor dargestellt wurde, sondern erschafft die Quadratrix als eine Projektion auf eine Ebene.

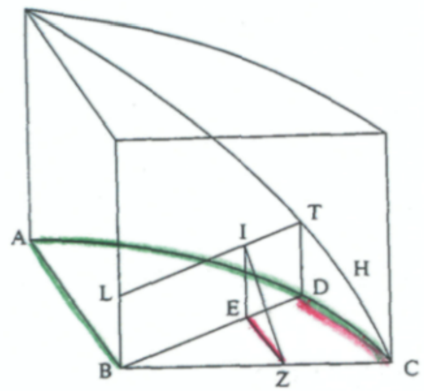

Abbildung 3: Konstruktion mit einer Helix

Der Viertelkreisbogen AC mit Mittelpunkt B sei gegeben. Nun wird durch sein Inneres zufällig eine Linie $\overline{BD}$ gezogen, so dass D auf dem Kreisbogen liegt. Auf $\overline{BC}$ wird eine Senkrechte $\overline{EZ}$ gezogen, so dass E auf $\overline{BD}$ liegt. Das Verhältnis von $\overline{EZ}$ und dem Kreisbogenstück DC ist gegeben (dies ist eine Voraussetzung für diese Konstruktion). Damit ist die Position des Punktes E auf $\overline{BD}$ sowie die Position von Z auf $\overline{BC}$ gegeben.
Zur Konstruktion der Quadratrix errichtet man nun einen Teilzylinder über dem Viertelkreis. Man implementiert nun eine Helix CHT in die Oberfläche des Teilzylinders über dem Kreisbogen ADC (siehe Abbildung 3). Es folgt die Konstruktion eines Rechtecks $LBDT$ mit E auf $\overline{BD}$, einem Punkt I senkrecht zu E auf $\overline{LT}$, so dass $\overline{EI}$ parallel (und längengleich) zu $\overline{DT}$ ist.
Das Verhältnis von $\overline{EI}$ und $\overline{DC}$ ist durch die Helix gegeben (da $|\overline{EI}| = |\overline{DT}|$), bekannt ist auch das Verhältnis von $\overline{EZ}$ zu DC: insgesamt kennt man also auch das Verhältnis von $\overline{EI}$ und $\overline{EZ}$. Damit ist die Strecke $\overline{EI}$ ebenfalls in ihrer Position gegeben. Dadurch ist die zu $\overline{BC}$ senkrechte Linie $\overline{ZI}$ ebenfalls gegeben (da sich die bekannten Verhältnisse nicht ändern, bleibt auch der Steigungswinkel $\angle ZEI$ konstant).
Daher liegt $\overline{ZI}$ auf einer den Zylinder schneidenden Ebene, selbiges gilt dann natürlich auch für I.
Gleichzeitig liegt der Punkt I aber auch auf der Oberfläche, die von der Helix erzeugt wird. Also liegt I auf einer eindeutig festgelegten Linie, nämlich der Schnittlinie der bereits erwähnten Ebene BC/ZI und der von der Helix erzeugten Oberfläche, die entsteht, wenn sich $\overline{LT}$ von $\overline{BC}$ über die Helix bewegt, wobei L stets senkrecht zu B ist.
Wenn man besagte Linie nun auf den Viertelkreis ABC projiziert, so liegt auch Punkt E auf einer eindeutig festgelegten Linie.

Ist das gegebene Verhältnis von $\overline{EZ}$ und DC gleich $\frac{|\overline{EZ}|}{DC} = \frac{\overline{AB}}{AC}$, so bildet die Spur von Punkt E die Quadratrix (dieses Verhältnis entspricht nämlich der bereits erwähnten Grundeigenschaft der Quadratrix).

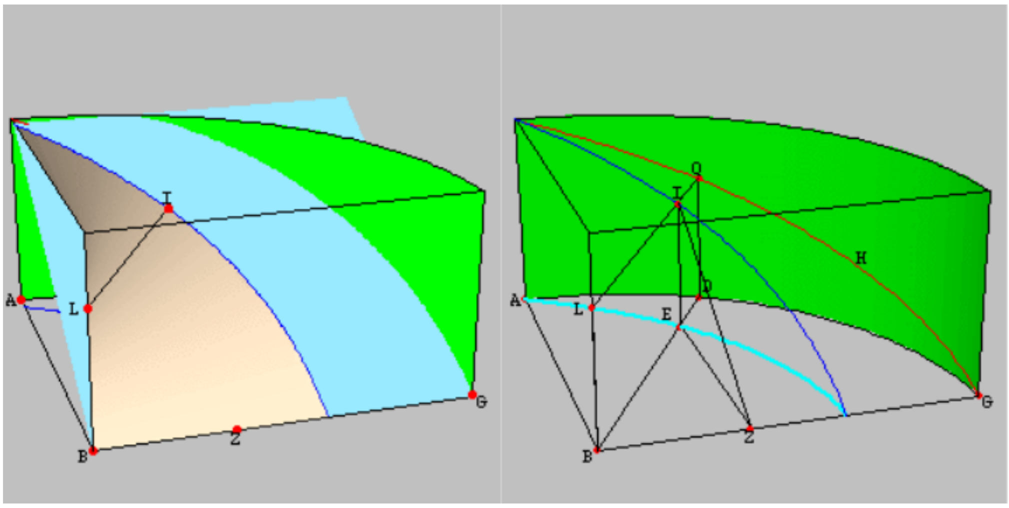

Abbildung 4: *Links:* Die Ebene, auf der ZI liegt (hellblau), schneidet die von der Helix erzeugte Oberfläche, auf der I ebenfalls liegt. *Rechts:* Die Quadratrix (hellblau) ist konstruiert.

2.2.2 Herleitung mittels der archimedischen Spirale

Ähnlich kann die Quadratrix auch mit Hilfe der *archimedischen Spirale* konstruiert werden. Man beschreibt auf einer Ebene wieder einen Kreisbogen ADC, wobei zunächst nicht zwangsweise $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ gelten muss. Die Strecken $\overline{BD}$, $\overline{EZ}$, $\overline{EI}$, $\overline{ZI}$ und $\overline{BL}$ sowie deren Punkte sind wie in 2.2.1 erzeugt (siehe Abbildung 5).

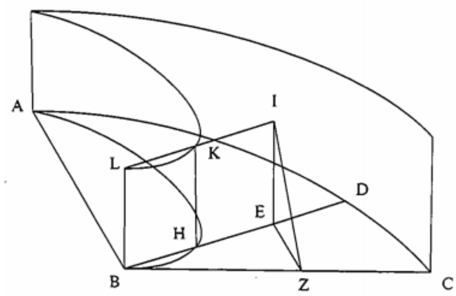

Abbildung 5: Herleitung mit der archimedischen Spirale

Annahme:

$$\|overlineEZ| : DC = |\overline{AB}| : ADC. \tag{1}$$

Man nimmt außerdem an, dass genau zu dem Zeitpunkt, wenn die Strecke $\overline{AB}$ den Bogen ADC vollständig durchlaufen hat (und somit dann auf $\overline{BC}$ liegt), ein Punkt, der in A losläuft, den Punkt B erreicht und die Spirale BHA konstruiert.
$\Rightarrow \frac{ADC}{CD} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BH}|}$ bzw. $\frac{|\overline{AB}|}{ADC} = \frac{|\overline{BH}|}{DC}$. Mit (1) folgt: $|\overline{EZ}| = |\overline{BH}|$.

Man zeichnet nun $\overline{HK}$ im rechten Winkel zur Ebene, so dass $\overline{HK}$ die gleiche Länge wie $\overline{BH}$ hat. Dann liegt der Punkt K auf einer zylindrischen Oberfläche über der Spirale (siehe Abbildung 6, links).

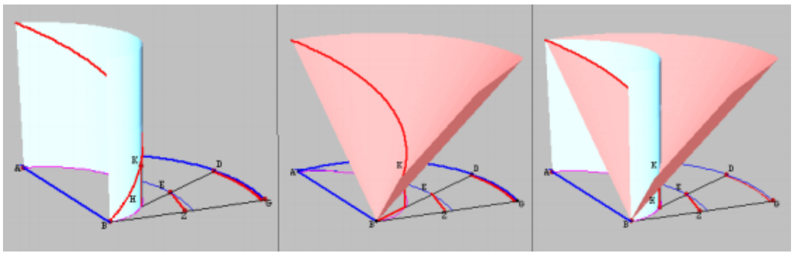

Abbildung 6: :
Links: zylindrische Oberfläche. *Mitte:* Kegel um B. *Rechts:* Schnittlinie der Objekte.

K liegt aber auch auf einem eindeutig festgelegten Kegel: verbindet man B und K, so liegt $\overline{BK}$ auf einem Kegel um Punkt B (siehe Abbildung 6, Mitte). Also liegt K auf einer eindeutig festgelegten Linie, nämlich der Schnittlinie der zwei genannten Objekte (Abbildung 6, rechts).

Die Strecke $\overline{LKI}$ liegt ebenfalls auf einer Oberfläche, die von der rotierenden aufsteigenden Bewegung von $\overline{LKI}$ erzeugt wird (siehe Abbildung 7, links).
I liegt jedoch auch auf einer eindeutig festgelegten Ebene (Abbildung 7, Mitte). Es folgt: I liegt ebenfalls auf einer eindeutig festgelegten Kurve (Abbildung 7, rechts).
Gilt nun, wie oben zunächst nicht festgelegt, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, so bildet die Projektion der Spur von I auf die Kreisebene (=Spur von E) die Quadratrix.

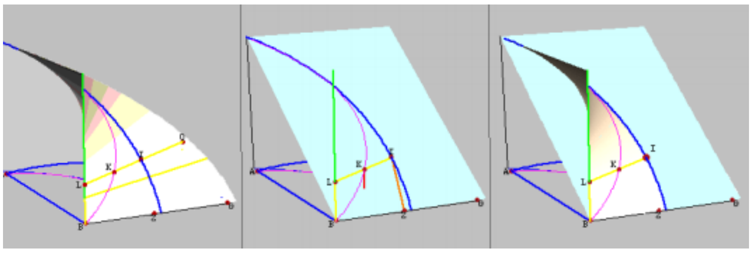

Abbildung 7: *Links:* Oberfläche, auf der $\overline{LKI}$ liegt und Spur von I. *Mitte:* Ebene, auf der Spur von I liegt. *Rechts:* Schnittlinie.

3 Anwendungen der Quadratrix

3.1 Quadratrix als Trisektrix: Winkeldreiteilung

Wie am Anfang erwähnt, nennt man die Quadratrix des Hippias auch Trisektrix des Hippias, denn man kann sie auch für die Dreiteilung (bzw. sogar n-Teilung) eines beliebigen Winkels $\leq \frac{\pi}{2}$ benutzen. Wie das funktioniert, wird nun gezeigt.

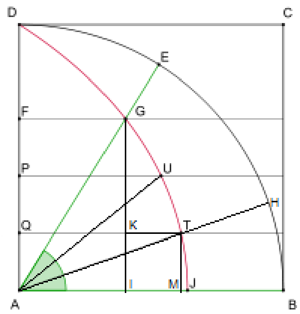

Abbildung 8: die Winkeldreiteilung mittels der Quadratrix

Man kann die Grundeigenschaft der Quadratrix folgendermaßen erweitern: $\frac{EB}{DB} = \frac{|\overline{FA}|}{|\overline{DA}|} = \frac{\angle EAB}{\angle DAB}$ (Hier wurde die Grundeigenschaft etwas abgeändert: Nun beschreibt sie das Verhältnis von der noch zurückzulegenden Strecke zur Gesamtstrecke).
Das heißt, um den Winkel $\angle EAB$ in drei (oder n) zu teilen, muss man nur die Strecke $\overline{FA}$ durch 3 (oder n) teilen, s.d. $|\overline{FA}| = 3|\overline{QA}|$ (oder $F = nQ$). Nun zieht man durch Q die Parallele zur Seite $\overline{AB}$. Der Winkel $\angle TAB$, wobei T der Schnittpunkt der Parallele mit der Quadratrix ist, entspricht einem Drittel (oder dem n-ten Teil) des Winkels $\angle EAB$.
Dass die Winkelteilung in das Verhältnis $a : b$ mit der Quadratrix funktioniert, kann man folgendermaßen beweisen.
Wie erwähnt, gelten die Verhältnisse $\frac{DB}{EB} = \frac{|\overline{DA}|}{|\overline{FA}|}$ und $\frac{DB}{HB} = \frac{|\overline{DA}|}{|\overline{TM}|}$ (dies folgt aus der Grundeigenschaft). Stellt man die erste Gleichung nach EB um, erhält man $EB = \frac{|\overline{FA}|}{|\overline{DA}|}DB$. Es folgt $\frac{EB}{HB} = \frac{|\overline{FA}|}{|\overline{DA}|} \cdot \frac{DB}{HB} = \frac{|\overline{FA}|}{|\overline{TM}|} = \frac{|\overline{GI}|}{|\overline{TM}|} = \frac{|\overline{GI}|}{|\overline{KI}|}$. Subtrahiert man auf beiden Seiten eine 1, gilt $\frac{EB}{HB} - 1 = \frac{EB-HB}{HB} = \frac{|\overline{GI}|}{|\overline{KI}|} - 1 = \frac{|\overline{GI}|-|\overline{KI}|}{|\overline{KI}|} \Rightarrow \frac{EH}{HB} = \frac{|\overline{GK}|}{|\overline{KI}|}$. Da $\frac{|\overline{GK}|}{|\overline{KI}|} = \frac{a}{b}$ gilt, muss auch $\frac{EH}{HB} = \frac{a}{b}$ gelten. Es folgt $\frac{\angle EAH}{\angle HAB} = \frac{a}{b}$ und somit die Behauptung. $\square$

3.2 Quadratur des Kreises

Im Jahr 335 v. Chr. erkannte Dinostratus, dass man die Quadratrix des Hippias auch dazu verwenden konnte, ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich dem des Viertelkreises, mit dem die Quadratrix konstruiert wurde, war.

3.2.1 Satz des Dinostratus

In seinem *Satz des Dinostratus* behauptet er, dass mit der Quadratrix das Verhältnis $\frac{DB}{r} = \frac{r}{r_0}$, wobei r gleich der Radius ($=|\overline{AB}|$) und $r_0 = |\overline{AJ}|$ die Strecke zwischen Ursprung und Schnitt der Quadratrix mit der x-Achse ist, gilt.
Dies beweist er mit dem folgenden, für die Zeit typischen apagogischen Beweis unter Anwendung der Trichotomie; er benutzt also die Eigenschaft, dass für zwei Elemente a, b in einer total geordneten Menge genau eine der drei Beziehungen $a < b, a = b$ oder $a > b$ gilt.
Angenommen, das oben genannte Verhältnis $\frac{DB}{r} = \frac{r}{r_0}$ gelte nicht, dann muss einer der folgenden zwei Fälle gelten:

Fall 1: Es ist $\frac{DB}{r} < \frac{r}{r_0}$, d.h. es gibt eine Strecke $\overline{AK}$ so, dass $|\overline{AK}| > |\overline{AJ}| = r_0$ und folgendes gilt:

$$\frac{DB}{r} = \frac{r}{|\overline{AK}|}. \tag{2}$$

O.B.d.A. wählt man K so, dass ein Kreis mit Radius $|\overline{AK}|$ um A die Quadratrix in G schneidet (wobei G beliebig ist).

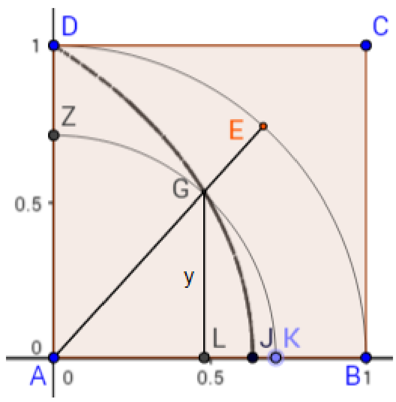

Abbildung 9: Fall 1 mit r=1.

Da das Verhältnis vom Umfang zweier Kreise gleich dem Verhältnis der Radien der Kreise ist, gilt:

$$\frac{r}{|\overline{AK}|} = \frac{DB}{ZGK} \tag{3}$$

$$\overset{(2)}{\widehat{\Rightarrow}} ZGK = r \tag{4}$$

Außerdem folgt aus der Quadratrixeigenschaft:

$$\frac{DB}{EB} = \frac{r}{y}. \tag{5}$$

Da aber DB und ZGK sowie EB und GK je denselben Winkeln genügen:

$$\frac{DB}{EB} = \frac{ZGK}{GK} \tag{6}$$

$$\overbrace{\Rightarrow}^{(5),(6)} \frac{ZGK}{GK} = \frac{r}{y} \overbrace{\Rightarrow}^{(4),(7)} GK = y \tag{7}$$

Dies ist offensichtlich falsch, da (nach *Archimedes : Kugel und Zylinder*, ca. 225 v. Chr.) gilt: Die kürzeste Verbindung, die zwei Punkte verbindet, ist die Gerade. Außerdem ist y als Senkrechte die kürzeste Strecke zwischen $\overline{AB}$ und der Parallelen $\overline{FF'}$ durch G, also kürzer als die Strecke $\overline{GK}$ (und damit auch kürzer als das Bogenstück GK).
Dieser Fall tritt also nicht ein.

<u>Fall 2:</u> Es gilt $\frac{DB}{r} > \frac{r}{r_0}$. Sei die Strecke $\overline{AK}$ mit $|\overline{AK}| < |\overline{AJ}| = r_0$ nun so, dass gilt:

$$\frac{DB}{r} = \frac{r}{|\overline{AK}|}.$$

Nun wählt man K o.B.d.A. als Schnittpunkt der Senkrechten von $\overline{AB}$ durch G mit $\overline{AB}$ selbst (siehe Abbildung 10).

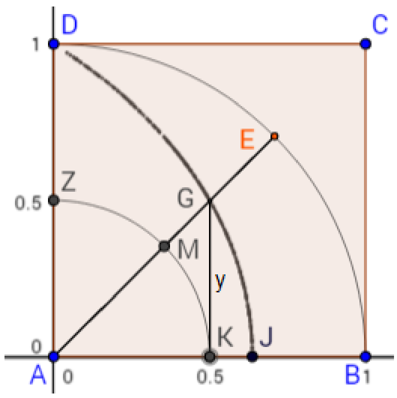

Abbildung 10: Fall 2

Es gilt wieder mit der gleichen Begründung wie in (3):

$$\frac{r}{|\overline{AK}|} = \frac{DB}{ZMK} \tag{8}$$

$$\Rightarrow ZMK = r \tag{9}$$

Wieder folgt aus der Grundeigenschaft der Quadratrix:

$$\frac{DB}{EB} = \frac{r}{y} \tag{10}$$

Da DB und ZMK bzw. EB und MK jeweils denselben Winkel haben, gilt:

$$\frac{DB}{EB} = \frac{ZMK}{MK} \overbrace{\Rightarrow}^{(10)} \frac{ZMK}{MK} = \frac{r}{y} \overbrace{\Rightarrow}^{(9)} MK = y \tag{11}$$

Aber: Jeder Kreisbogen kleiner als $\frac{\pi}{2}$ (ein Quadrant) ist kürzer als die Tangente, die, in unserem Fall beginnend in Punkt K, durch die den Kreisbogen beschränkende Gerade abgeschnitten wird (nach *Archimedes : Kugel und Zylinder*). Also kann $MK = y$ nicht gelten.
Damit tritt auch dieser Fall nicht ein.

Insgesamt wurde gezeigt dass weder $\frac{DB}{r} < \frac{r}{r_0}$ noch $\frac{DB}{r} > \frac{r}{r_0}$ gilt. Wegen Trichotomie folgt die Gleichheit und somit die Aussage. □

3.2.2 Quadratur

Wie erhält man daraus nun ein Quadrat mit derselben Fläche wie ein Viertelkreis? Hierfür gibt es mehrere Konstruktionen, von denen im Rahmen dieses Vortrags nur eine vorgestellt wird.

Der Satz des Dinostratus besagt also, dass das Verhältnis von $|\overline{AB}|$ zu $|\overline{AJ}|$ gleich $2 : \pi$ ist (denn es gilt $|\overline{AJ}| : |\overline{AB}| = \frac{2r}{\pi} : r = 2 : \pi$.)
Zu einem gegebenen Viertelkreis mit Radius r konstruiert man nun das Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge r. Die Quadratrix schneidet $\overline{AB}$ wieder im Punkt J und es gilt $|\overline{AJ}| = \frac{2r}{\pi}$. Man errichtet in J nun die Strecke $\overline{JK}$ senkrecht nach unten zu $\overline{AB}$ mit Länge r. Die Gerade durch $\overline{AK}$ schneidet nun die verlängerte Quadratseite $\overline{BC}$ in L. Mit Strahlensatz folgt: $|\overline{BL}| = \frac{\pi}{2}r$. Verlängert man nun $\overline{AB}$ über B hinaus um $|\overline{BO}| = \frac{r}{2}$, so begrenzen $\overline{BL}$ und $\overline{BO}$ ein Rechteck $OBLN$ mit demselben Flächeninhalt wie der Viertelkreis.
Mit Hilfe des Höhensatzes von Euklid und des Satz des Thales lässt sich nun ein

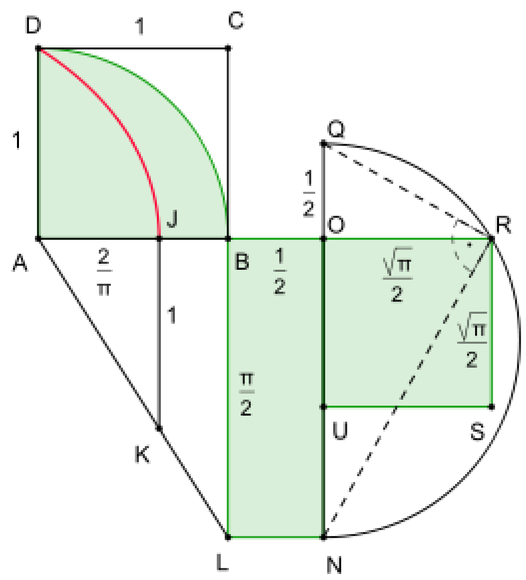

Abbildung 11: Die Quadratur des Kreises, hier mit r=1.

flächengleiches Quadrat erzeugen:
$\overline{ON}$ wird um $|\overline{OQ}| = \frac{r}{2}$ verlängert. Nun wird ein Halbkreis mit $|\overline{NQ}|$ als Durchmesser

errichtet, die Strecke $\overline{AO}$ wird verlängert, so dass sie den Halbkreis in R schneidet. Nach dem Satz von Thales ist das Dreieck $\triangle NQR$ rechtwinklig. Mit dem Höhensatz folgt, dass die Höhe des Dreiecks $\overline{OR}$ die Seitenlänge eines Quadrates ist, das flächengleich zu $OBLN$ und somit zu dem Viertelkreis ist.

3.3 ähnliche Anwendungen

Aus den beiden obigen Funktionen folgt natürlich, dass man die Quadratrix auch für verwandte Probleme benutzen kann. Beispielsweise lässt sich mit ihrer Hilfe der Kreis finden, dessen Umfang gleich einer gegebenen geraden Linie entspricht. Auch kann man mit ihr einen Kreis in beliebige Teilstücke teilen ($\Rightarrow$ Winkelteilung).

4 Kurvendiskussion

4.1 Asymptoten und Schnittpunkte mit der y-Achse

Wenn man die Quadratrix nicht nur eingeschränkt auf ein Quadrat betrachtet, sieht man, dass die Kurve unendlich viele Äste besitzt (Abbildung 12). Wird bei der Konstruktion der Quadratrix ein Kreis einmal komplett durchlaufen, bilden die Geraden $y = \pm 2r$ Asymptoten. Bei mehrfachem Durchlaufen sind die Geraden $y = 2rn,\ n \in \mathbb{Z}$ die Asymptoten der Kurve, denn es gilt $\lim_{y \to 2rn} y \cdot \cot(\frac{\pi}{2r} y) = 2rn \cdot \lim_{y \to 2rn} \cot(\frac{\pi}{2r} y) = 2rn \cdot \lim_{y \to n} \cot(\pi y) = \infty$.

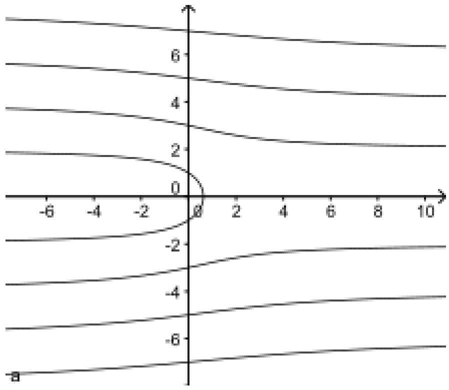

Abbildung 12: Quadratrix als ebene Kurve mit r=1.

Wie man in dieser Abbildung außerdem erkennt, schneidet die Quadratrix die y-Achse in den Punkten $y = r(n+1)$, denn $y \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2r} y\right) = 0 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2r} y\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2r} y = \frac{\pi}{2}(n+1) \Leftrightarrow y = r(n+1)$.

4.2 Wendepunkte

Die jenseits von den Geraden $y = \pm 2r$ liegenden Äste haben Wendepunkte, deren Position man folgendermaßen ermittelt.
Um die Nullstellen der zweiten Ableitung zu bestimmen, differenzieren wir zunächst die Gleichung $\arctan(\frac{y}{x}) = \frac{\pi}{2r} \cdot y$ nach x (diese Gleichung entspricht unserer Funktionsgleichung von oben, denn es gilt $x = y \cdot \cot(\frac{\pi}{2r} \cdot y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\tan(\frac{\pi}{2r} \cdot y)}{y} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \tan(\frac{\pi}{2r} \cdot y) \Leftrightarrow \arctan(\frac{y}{x}) = \frac{\pi}{2r} \cdot y$):

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{\pi}{2r} \cdot y' \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x - \frac{\pi}{2r} \cdot (x^2 + y^2)} \tag{12}$$

Erneutes Ableiten liefert:

$$y'' = \frac{(x - \frac{\pi}{2r}(x^2+y^2))y' - y(1 - \frac{\pi}{2r}(2x + 2yy'))}{(x - \frac{\pi}{2r}(x^2+y^2))^2} \tag{13}$$

Setzt man nun das Ergebnis aus (12) für y' in den Zähler ein und setzt dies gleich Null:

$$\frac{(x - \frac{\pi}{2r}(x^2+y^2)) \cdot y}{(x - \frac{\pi}{2r}(x^2+y^2))} - y\left(1 - \frac{\pi}{2r}\left(2x + \frac{2y^2}{x - \frac{\pi}{2r}(x^2+y^2)}\right)\right) = y - y\left(1 - \frac{\pi}{r}x - \frac{\pi y^2}{rx - \frac{\pi}{2}(x^2+y^2)}\right) = 0$$

Es gilt $y \neq 0$ (da wir uns jenseits der Asymptoten $y = \pm 2r, r \neq 0$ befinden), also ergibt sich mit $\frac{y}{x} = tan(\frac{\pi}{2r}y)$:

$$\left(\frac{\pi}{r}x - 2\right)\left(\tan^2\left(\frac{\pi}{2r}y\right) + 1\right) = 0 \Rightarrow \text{Lösung: } x = \frac{2r}{\pi}$$

Demzufolge sind alle Punkte der Quadratrix jenseits von $y = \pm 2r$, die die Senkrechte $x = \frac{2r}{\pi}$, also die Senkrechte über dem „Schnittpunkt“ der Kurve mit der x-Achse, schneiden, Wendepunkte der jeweiligen Zweige.

4.3 Tangentenkonstruktion

Wie bereits festgestellt wurde, beträgt die Länge der Strecke $|\overline{AJ}| = \frac{2r}{\pi}$. Weiter wurde gezeigt, dass $y' = \frac{y}{x - \frac{\pi}{2r}(x^2+y^2)}$. Also lautet die Tangentengleichung in Punkt $G = (x_1, y_1)$ der Quadratrix wie folgt:

$$y = (x - x_1) \cdot \frac{y_1}{x_1 - \frac{\pi}{2r}(x_1^2 + y_1^2)} + y_1$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ergibt sich, wenn man $y = 0$ setzt:

$$-y_1 = (x - x_1) \cdot \frac{y_1}{x_1 - \frac{\pi}{2r}(x_1^2 + y_1^2)} \Leftrightarrow x - x_1 = -x_1 + \frac{\pi}{2r}(x_1^2 + y_1^2) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2r}(x_1^2 + y_1^2)$$

Dies entspricht $|\overline{AT}| = \frac{\pi}{2r}|\overline{AG}|^2$ bzw. $|\overline{AG}|^2 = |\overline{AJ}| \cdot |\overline{AT}|$.

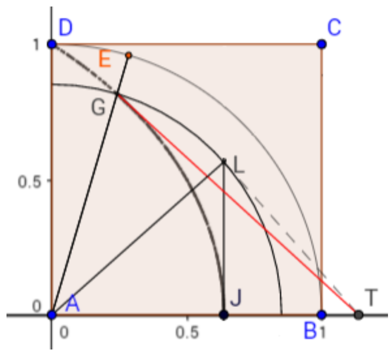

Abbildung 13: Konstruktion der Tangente von Punkt G (rot eingezeichnet).

Die Tangente im Punkt G wird also folgendermaßen konstruiert: Um A wird ein Kreis mit Radius $|\overline{AG}|$ geschlagen, der das Lot von J auf der x-Achse in einem Punkt L schneidet. Man zeichnet dann auf der Strecke $\overline{AL}$ das Lot im Punkt L, welches die x-Achse im Punkt T schneidet. Die Gerade durch G und T ist dann die gesuchte Tangente.

4.4 Weitere Eigenschaften

Wie bereits bemerkt wurde, bietet es sich an, wenn die Quadratrix als (einfach darstellbare) Funktion beschrieben werden soll, die x- und y-Achse zu vertauschen (siehe Abbildung 14):

$\Rightarrow f(x) = x \cdot \cot(\frac{\pi}{2r}x)$.

Außerdem ist die Quadratrix symmetrisch zur x-Achse, da die Funktion cot punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist: es gilt $x(-y) = -y \cdot \cot\left(-\frac{\pi}{2r}y\right) = -y \cdot \left(-\cot\left(\frac{\pi}{2r}y\right)\right) = y \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2r}y\right) = x(y)$.

Die Fläche unter dem Teil der Quadratrix, der beim einmaligen Durchlaufen eines Viertelkreises mit Radius r entsteht, beträgt:

$\int_0^r x \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2r} \cdot x\right) dx = 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \ln(2)}{\pi}$.

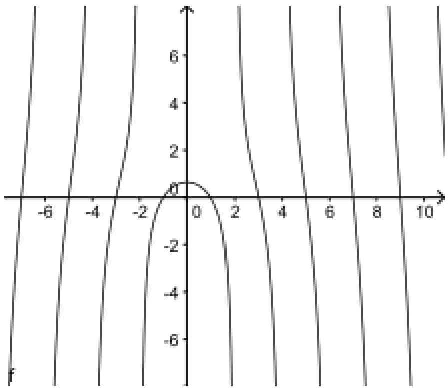

Abbildung 14: Die Quadratrix als Funktion mit r=1.

5 Sonstiges

5.1 Kritik an der Quadratrix

Wie bereits erwähnt, war die Quadratrix schon zur damaligen Zeit nicht unumstritten.
Ein großer Kritikpunkt war, dass man in der Konstruktion der Quadratrix das Verhältnis vom Radius eines Kreises zu dessen Umfang (bzw. den Wert von π) bereits kennen muss, um die Geschwindigkeiten der beiden Geraden aufeinander abzustimmen. Der griechische Mathematiker und Astronom SPORUS (ca. 240-300 n. Chr.) sagte hierzu, Dinostratus setze hierbei schon voraus, dass die Quadratur des Kreises mittels der Quadratrix möglich sei, bevor er dies überhaupt beweist.
Eine andere Tatsache, die viel kritisiert wurde, ist, dass der wichtigste Punkt der Quadratrix, nämlich deren Schnitt mit der x-Achse J, bzw. die Strecke $|\overline{AJ}| = \frac{2r}{\pi}$ nicht konstruiert, sondern nur angenähert werden kann (wenn man das Verhältnis von Radius und Umfang eines Kreises kennt). Somit könne die Quadratrix wegen ihrer konstruktiven Unvollkommenheit keine exakten Lösungen liefern, sondern nur Näherungen mit beliebig kleinem Fehler.

5.2 Fazit

Trotz der genannten Hauptkritikpunkte bleibt die Quadratrix eine sehr interessante Kurve, die trotz ihrer recht einfachen Konstruktion gleich zur „Lösung“ von zwei der drei großen Probleme der antiken Mathematik, der Dreiteilung des Winkels und der Quadratur des Kreises, beiträgt. Als älteste bekannte Kurve jenseits von Kreis und Gerade birgt sie zahlreiche interessante Details, von denen die größten in diesem Skript abgehandelt wurden.

6 Quellenangabe

Buchquellen:

Hans Niels Jahnke: A History Of Analysis. American Mathematical Soc. 2003, S.30-32.

Dudley Underwood: The Trisectors. Cambridge University Press 1994, S.6-8.

Thomas Thomson: Annals of Philosophy, Or, Magazine of Chemistry, Mineralogy, Mechanics, Natural History, Agriculture and the Arts. Robert Baldwin Verlag 1816, S.22-25.

David M. Burton: A History Of Mathematics - An Introduction. McGraw-Hill 2011, S.130-137.

Dörte Haftendorn: Kurven erkunden und verstehen. Springer Fachmedien Wiesbaden 2017, S.175-176.

Horst Hischer: Mathematik - Medien - Bildung. Springer Fachmedien Wiesbaden 2016, S.258-260, 263f., 287-289.

Hermann Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden 1949, S.241-246.

H.W. Alten, A. Djafari Naini, B. Eick, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock, H. Wußing: 4000 Jahre Algebra. Geschichte - Kulturen - Mengen. Springer Verlag 2014, S.96-99.

Online-Quellen:

http://de.academic.ru/dic.nsf/technik/18130/Quadratrix

http://de.academic.ru/dic.nsf/dewiki/2551723/Quadratrix_des_Hippias

http://www.ms.uky.edu/~carl/ma330/hippias/hippias2.html

http://horst.hischer.de/publikationen/zeitschr-beitraege/1994-MathSchule-MU_Gesch/1994-Math-Gesch-Teil2.pdf

http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1061420.files/Quadratrix%20handout%20Connemara%20Doran.revised.pdf

http://www.numericana.com/answer/curve.htm#hippias

https://www.cs.cas.cz/portal/AlgoMath/Geometry/PlaneGeometry/PlaneCurves/TranscendentalCurves/QuadratrixOfHippias.htm

http://www.linkfang.de/wiki/Quadratrix_des_Hippias